

ЛЕКЦИЯ № 9

Малые и линейные колебания.

Маятнику надо поставить памятник,
как собаке Павлова.

Е.А.Туров

Переходим к разделу «Колебания в механике». Это – очень важный раздел механики, знать который надо всем физикам, но особенно тем, кто намерен в будущем заниматься физикой твердого тела. Несмотря на то, что эта область физики имеет дело с системой очень большого числа частиц, но как правило, можно выделить некоторые колебательные степени свободы, которые определяют основные характеристики образца, но описываются в рамках конечномерных динамических систем.

Прежде всего, определим термин «малые колебания». Рассмотрим два простых примера: (1) колебания массы, прикрепленной к пружине, рассматриваемой в рамках закона Гука (Рис.33), и (2) колебания математического маятника (Рис.34).



Рис.33

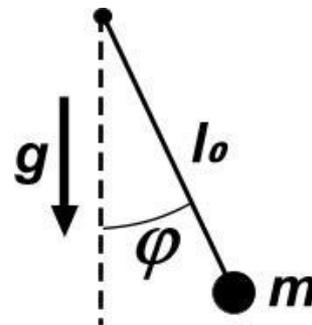


Рис.34

В первом случае уравнение движения имеет вид

$$m\ddot{x} + kx = 0. \quad (9.1)$$

Это- уравнение гармонического осциллятора, и его решения – линейные или *гармонические колебания*, описываемые функцией

$$x = A \cos(\omega_0 t + \alpha) = a \cos(\omega_0 t) + b \sin(\omega_0 t), \quad (9.2)$$

содержащей 2 произвольных параметра: (A, α) или (a, b) . Функции $\cos(\omega_0 t)$ и $\sin(\omega_0 t)$ образуют ортонормированный базис решений (9.1). Константы в решениях (9.2) связаны соотношениями $A = \sqrt{a^2 + b^2}$ и фаза $\alpha = -\arctg(b/a)$. Частота линейных колебаний равна $\omega_0 = \sqrt{k/m}$, а амплитуда A может быть произвольной. Поэтому в этом случае нельзя говорить о малости колебаний, поскольку их амплитуду не с чем сравнивать.

Во втором примере уравнение колебаний имеет вид

$$ml_0^2 \ddot{\varphi} + mgl_0 \sin \varphi = 0, \quad (9.3)$$

Решения этого уравнения – существенно нелинейные колебания, но величина угла φ ограничена величиной π . Поэтому в данном случае при $\varphi \ll \pi$ можно говорить о *малых колебаниях*, поскольку есть с чем сравнивать их амплитуду. В пределе *линейных колебаний* уравнение (9.3) сводится к линейному

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = 0, \quad \omega_0 = \sqrt{g/l_0}, \quad (9.4)$$

а при учете нелинейных добавок в уравнении

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 (\varphi - \varphi^3 / 6) = 0 \quad (9.5)$$

можно говорить о *малых, слабо нелинейных колебаниях*.

Возвращаясь к уравнению гармонических колебаний линейного осциллятора (9.1), заметим, что это уравнение является лагранжевым с лагранжианом и энергией

$$L = \frac{m}{2} \dot{x}^2 - \frac{k}{2} x^2, \quad E = \frac{m}{2} \dot{x}^2 + \frac{k}{2} x^2. \quad (9.6)$$

Решение (9.2) можно представить как вещественную часть $x = \operatorname{Re} \psi$ комплексной величины $\psi = A \exp(i\omega_0 t + i\alpha)$. Эта комплексная функция есть решение уравнения (9.1), представленного в комплексном виде. В математике обычным является представление дифференциального уравнения n -того порядка в виде n уравнений первого порядка. Представим уравнение (9.1) в виде системы двух уравнений первого порядка для координаты и импульса:

$$\dot{x} = p/m, \quad \dot{p} = -kx. \quad (9.7)$$

(Позже, в Лекции № мы увидим, что это – представление уравнений механики в гамильтоновом виде). Умножив первое уравнение на $\sqrt{m\omega_0}$, а второе на $i/\sqrt{m\omega_0}$ и сложив их, получим для комплексных величин

$$\psi = (\sqrt{m\omega_0}x + ip/\sqrt{m\omega_0})/\sqrt{2}, \quad \bar{\psi} = (\sqrt{m\omega_0}x - ip/\sqrt{m\omega_0})/\sqrt{2} \quad (9.8)$$

комплексное уравнение

$$i\dot{\psi} = \omega_0\psi, \quad i\dot{\bar{\psi}} = -\omega_0\bar{\psi} \quad (9.10)$$

решения которого $\bar{\psi} = A\exp(i\omega_0 t + i\alpha)$, естественно, совпадает с приведенным выше комплексным решением уравнения (9.1). В курсе «Квантовая механика» вы позже увидите, что функции (9.8) являются классическими аналогами операторов уничтожения и рождения в методе вторичного квантования. Но они играют важную роль и в классической механике. Легко проверить, что уравнения (9.10) для обобщенных координат ψ и $\bar{\psi}$ являются лагранжевыми для лагранжиана

$$L = \frac{i}{2}(\dot{\psi}\bar{\psi} - \dot{\bar{\psi}}\psi) - \omega_0\psi\bar{\psi} \quad (9.11)$$

с соответствующей энергией $E = \omega_0\psi\bar{\psi}$. Последнее можно получить и непосредственно, подставляя в выражение для энергии (9.6) соотношения $x = (\psi + \bar{\psi})/\sqrt{2m\omega_0}$ и $\dot{x} = -i(\psi - \bar{\psi})\sqrt{m/2\omega_0}$.

Хотя мы получили уравнения (9.10) из уравнения колебания осциллятора (9.1), они получаются в физике независимо в различных задачах. Примерами являются свободное вращение симметрического волчка (будет рассмотрено подробно в Лекции №) – Рис.35, и вращение магнитного момента во внешнем магнитном поле – Рис.36.

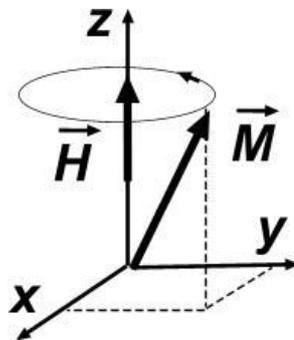


Рис.35

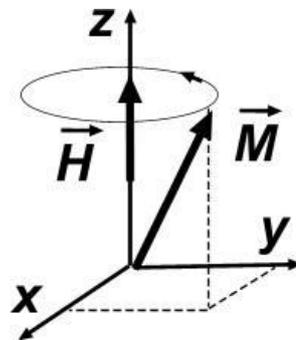


Рис.36

В первом случае уравнение (9.10) получается при слабом отклонении вектора симметрии симметрического волчка от вектора Z (направления углового момента \vec{M}) для величины $\psi = n_x + in_y$, а во втором – при слабом отклонении вектора магнитного момента от направления магнитного поля для величины $\psi = M_x + iM_y$. Однако, при включении в рассмотрение нелинейности, затухания, внешних воздействий в различных приложениях обобщения уравнений (9.1) и (9.10) могут быть разными, однако качественно результаты оказываются сходными. Поэтому в следующих лекциях мы иногда будем пользоваться обобщениями уравнений (9.10) для качественного понимания физики задач.

Влияние затухания на линейные колебания.

Из принципа детерминизма следует, что ускорение полностью определяется значениями координат и скоростей: $\ddot{x} = f(x, \dot{x}, t)$, поэтому в общем случае уравнение (9.1) может содержать в правой части силы, зависящие от скорости движения тела – *силы трения*. В простейшем случае малой силы трения ее можно выбрать в виде линейной по скорости $f_{mp} = -\eta \dot{x}$ с положительным коэффициентом затухания $\eta > 0$. При этом уравнение движение принимает вид

$$m\ddot{x} + kx = -\eta\dot{x}. \quad (9.12)$$

В принципе, это уравнение можно рассматривать в качестве лагранжева уравнения с лагранжианом вида: $L = (m\dot{x}^2 / 2 - kx^2 / 2) \exp(\eta t / m)$. Однако, уже для нескольких частиц с разным трением мы уже выходим за рамки лагранжева подхода. Это связано с тем, что трение обусловлено взаимодействием со средой. Это выводит нас за пределы механики в область статистической физики. Однако, силу трения можно учесть, модифицировав уравнение Лагранжа. Умножив (9.12) на \dot{x} , представим полученное выражение в виде соотношения

$$\frac{dE}{dt} = -2F(\dot{x}), \quad (9.13)$$

где E – энергия (9.6) невозмущенной диссипацией системы, а $F(x)$ – так называемая *диссипативная функция*:

$$F = \frac{\eta}{2} \dot{x}^2. \quad (9.14)$$

С использованием диссипативной функции уравнение (9.12) с диссипацией может быть представлено в виде модификации уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = - \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}. \quad (9.15)$$

При изучении динамики осциллятора с трением удобно переписать (9.12) в виде

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + 2\lambda \dot{x} = 0, \quad (9.16)$$

поскольку введенный параметр затухания $\lambda = \eta/2m$ имеет ту же размерность, что и собственная частота ω_0 , и легко оценивать относительную величину затухания. Динамика существенно различается при большом и малом затухании, и критической величиной трения является величина $\lambda_{кр} = \omega_0$. Подставив в (9.16) решение в виде $\exp(rt)$ и получив *характеристическое уравнение* $r^2 + 2\lambda r + \omega_0^2 = 0$, находим его корни $r = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}$. При малом затухании $\lambda < \omega_0$ Эти корни комплексны и решение имеем вид

$$x = A \cos(\omega t + \alpha) \exp(-\lambda t), \quad (9.17)$$

где частота колебания $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$ отлична от собственной частоты осциллятора ω_0 , но при малом затухании $\lambda \ll \omega_0$ сдвиг частоты $\omega - \omega_0 \sim \lambda^2$ квадратичен по малому параметру. Таким образом, движение осциллятора представляет колебание с частотой меньше собственной и с амплитудой, затухающей по экспоненциальному закону – Рис.37. При большом трении с $\lambda > \omega_0$ оба корня характеристического уравнения вещественны, и общее решение имеет вид

$$x = c_1 \exp(\Gamma_1 t) + c_2 \exp(-\Gamma_2 t), \quad \Gamma_{1,2} = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}. \quad (9.18)$$

В этом случае движение носит аperiodический характер и амплитуда осциллятора либо монотонно падает, либо совершает одно колебательное движение (см. Рис.38).

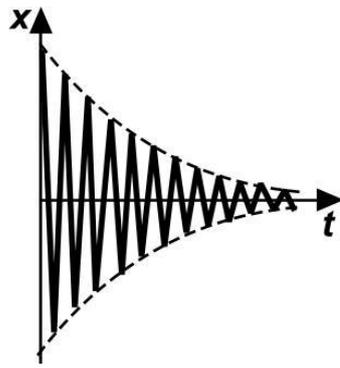


Рис.37

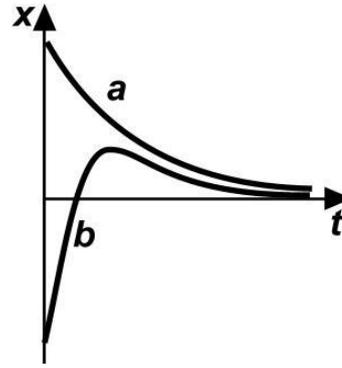


Рис.38

Качественно о рассмотренном движении можно судить по фазовому портрету системы. Вспомнив фазовый портрет осциллятора без трения с особой точкой типа «центр» (Рис.39), видим, что при малом трении из (9.13) следует, что фазовая траектория переходит на эллипсы все меньшего радиуса, описывая спиральную кривую (Рис.40). Теперь в центре фазового портрета расположена особая точка типа «устойчивого фокуса». Подставляя в правую часть (9.13) решение (9.17) и проводя усреднение по периоду колебания ($\langle \cos^2 \omega t \rangle = 1/2$), получаем $dE/dt = -(\lambda mA^2 \omega^2) \exp(-2\lambda t)$. Поскольку в том же приближении $E = (mA^2 \omega^2 / 2) \exp(-2\lambda t)$, то уравнение для диссипации энергии имеет вид $dE/dt = -2\lambda E$, а сама энергия убывает по экспоненциальному закону $E = E_0 \exp(-2\lambda t)$.



Рис.39



Рис.40

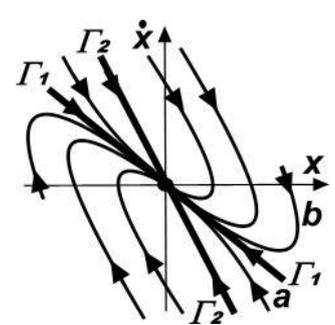


Рис.41

Ситуация меняется при сильном затухании с $\lambda > \omega_0$. Для каждого из двух линейно независимых решений вида $x_i = \exp(\Gamma_i t)$ выполняется соотношение $\dot{x}_i = \Gamma_i x_i$, т.е. на фазовом портрете системы эти траектории представляют прямые линии, разделяющие траектории типа a и b (см. Рис.38) и являющиеся *сепаратрисами*. Полный фазовый портрет в этом случае изображен на Рис.41. Поскольку $\Gamma_2 < \Gamma_1$, то при больших временах ($t \rightarrow +\infty$) «выживает» только решение с Γ_1 , и фазовые траектории

«прижимаются» к этой сепаратрисе (Рис.41). Особая точка ($x = \dot{x} = 0$) на фазовом портрете называется *устойчивым узлом*.

Введенное выше в уравнение (9.16) диссипативное слагаемое выглядит наиболее естественно для данной задачи. Однако оно не единственно возможное. Если представить уравнение (9.16) в виде системы двух уравнений первого порядка типа (9.7) и ввести комплексную функцию (9.8), то получим такое комплексное уравнение:

$$i\dot{\psi} = \omega_0\psi - i\lambda(\psi - \bar{\psi}), \quad (9.19)$$

эквивалентное вещественному уравнению (9.16). При слабом затухании в т.н. *резонансном приближении* последнее слагаемое в (9.19) может быть отброшено (в меру малости $\lambda/\omega_0 \ll 1$). При этом получается простое уравнение

$$i\dot{\psi} = (\omega_0 - i\lambda)\psi, \quad (9.20)$$

в котором затухание учитывается простой заменой собственной частоты $\omega_0 \rightarrow \omega_0 - i\lambda$. Конечно, полученное уравнение только приближенно соответствует исходному вещественному уравнению (9.16), но оно существенно проще его. Поэтому в следующих лекциях при рассмотрении более сложных задач мы будем использовать этот подход. Заметим, что если рассматривать уравнение для комплексной амплитуды не как преобразование вещественного уравнения, а как самостоятельное, возникающее в определенных физических задачах, то указанное диссипативное слагаемое может рассматриваться как феноменологическое. В указанном приближении с точностью до слагаемых порядка $(\lambda/\omega_0)^2$ уравнение (9.20) может быть записано также в форме $i\dot{\psi} = \omega_0\psi + \lambda\dot{\psi}/\omega_0$.